

14 diciembre 2011



Modelación Dinámica y Simulación de Robots

Miguel Torres Torriti

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Eléctrica



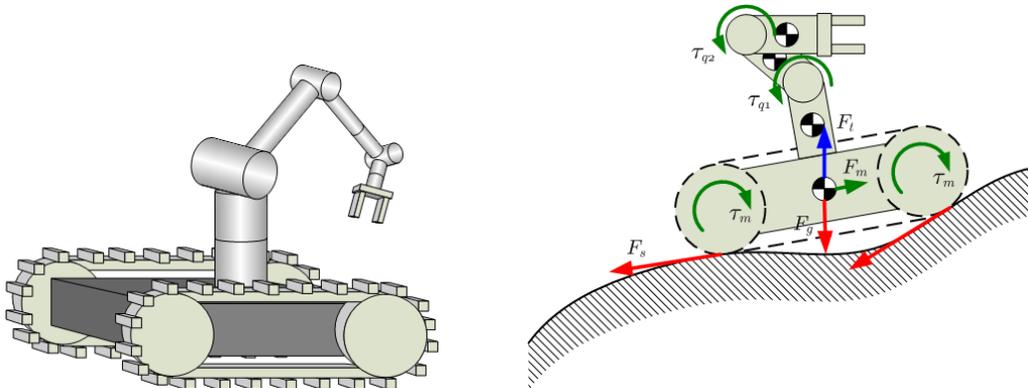
Contenidos

- Cinemática Directa y el Procedimiento de Denavit-Hartenberg
- Dinámica Inversa y el Algoritmo Recursivo de Newton-Euler



ABB IRB2400

¿Por qué simular?



¿Por qué simular?

- Diseñar/verificar antes de construir
- Experimentar sin destruir equipo costoso
- Entrenar/Experimentar en un ambiente controlado y sin peligro

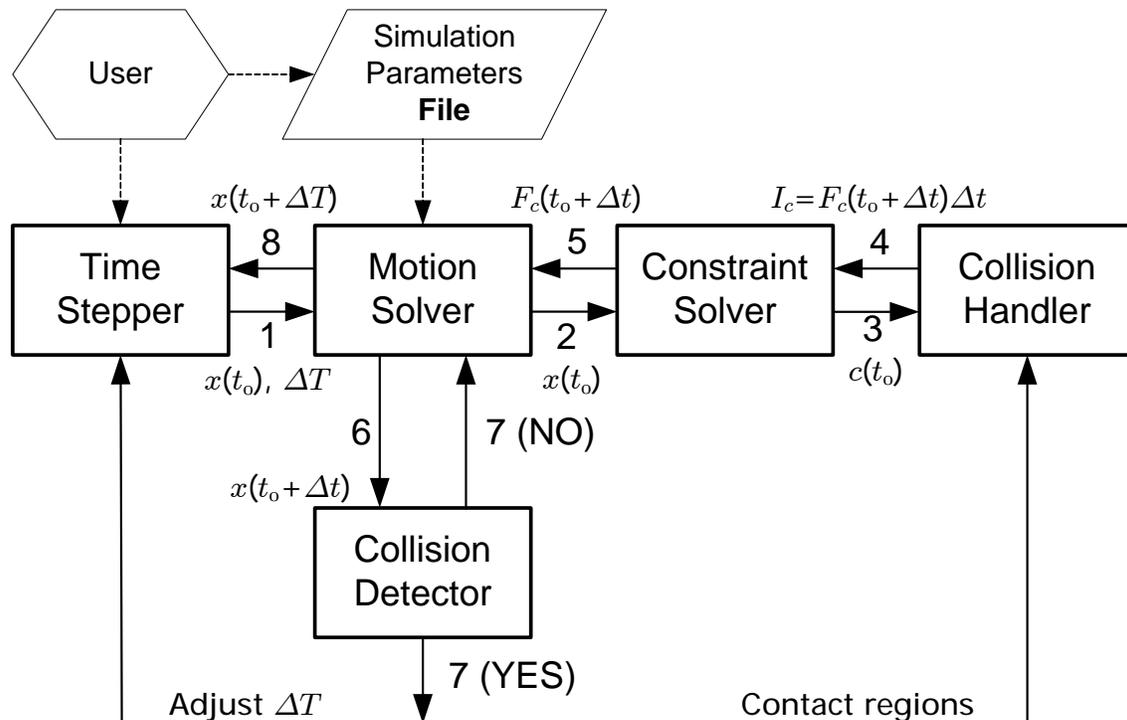
Cuidado!

- Of the thousands of ways computers have been misused, simulation tops the list. The reasons for this widespread abuse are not hard to find:
 1. Every simulation simulates something, but there's no particular reason it should simulate what the simulator had in mind.
 2. Computer outputs are readily mistaken for gospel, especially by people who are working in the dark and seeking any sort of beacon.
 3. Simulation languages have succeeded in making it easier to achieve impressive simulations, without making it easier to achieve valid simulations.
 4. There are no established curricula based on extensive practical experience. Thus, everyone is an "expert" after writing one simulation, of anything, in any language, with any sort of result.
 5. The promise of simulation is so great that it's easy to confuse hope with achievement.
- *Simulation: Principles and Methods, Graybeal and Pooch, 1980.*

Criterios de Implementación

- Tipos de Coordenadas:
 - Representaciones Maximales (aka, absolutas, Lagrangianas)
 - Usadas en Gráfica Computacional, Physics Engines (Baraff, Mirtich)
 - Requieren la solución de un Linear Complementarity Problem (LCP) para manejar las restricciones y colisiones (Anitescu+Potra, Trinkle).
 - No hay que preocuparse de rotaciones relativas entre cuerpos, todo es con respecto a un sistema inercial absoluto.
 - Reducidas (aka, generalizadas, recursivas):
 - Usadas en Multibody-Rigid Systems, Robótica
 - Soluciones computacionalmente rápidas para la dinámica directa:
 - ◆ Composite-Rigid Body Algorithm (Walker+Orin, 1982).
 - ◆ Articulated-Rigid Body Algorithm (Featherstone, 1987).
 - Resulta difícil incorporar restricciones y colisiones.

Arquitectura de un Simulador

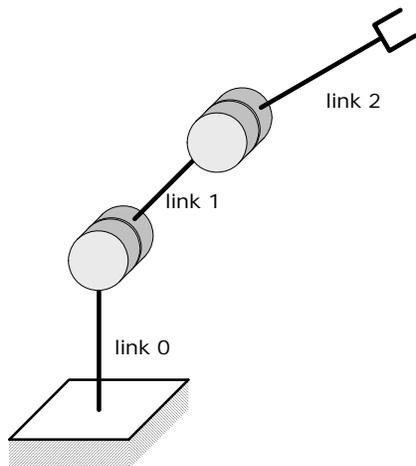


Cinemática del Brazo Robótico

- Estudio analítico de la geometría del movimiento de un brazo robótico con respecto a un sistema de coordenadas fijo en función del tiempo sin considerar las fuerzas/torques que originan dicho movimiento.
- Los dos problemas fundamentales concernientes al desplazamiento espacial del brazo robótico son:
 1. **Cinemática Directa:** Dadas las coordenadas generalizadas $q(t) = [q_1(t) \ q_2(t) \ \dots \ q_n(t)]$ de las articulaciones y los parámetros geométricos del robot, donde n es el número de grados de libertad, determinar cuál es la posición del efector final con respecto a sistema de coordenadas de referencia.
 2. **Cinemática Inversa:** Dadas una posición y orientación del efector final, cuáles son los distintos posibles valores que cada articulación debe tener.

Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar – Links and Joints

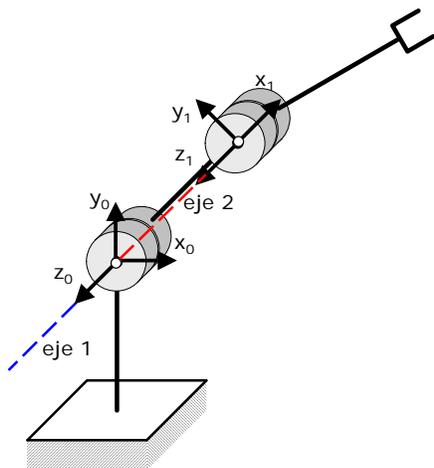
Dibujado en pizarrón.



Se requiere conocer el ángulo de cada articulación (coordenadas generalizadas) para toda posición deseada de la herramienta en espacio de trabajo (coordenadas del mundo).

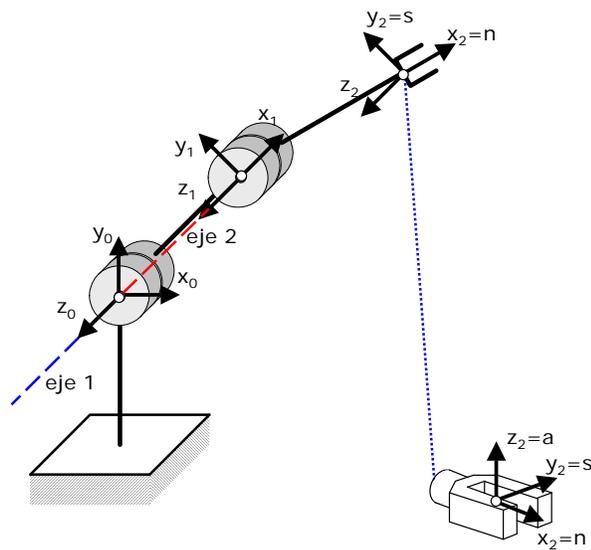
Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar – Coordinate Systems

Dibujado en pizarrón.



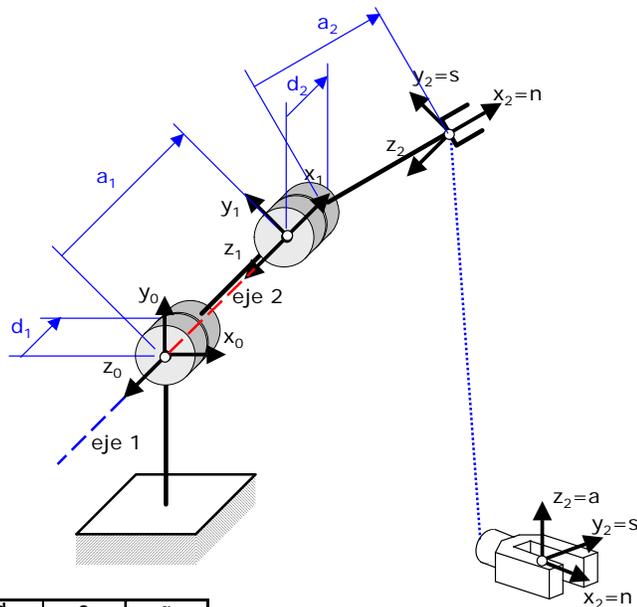
Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar – End Effector

Dibujado en pizarrón.



Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar – DH Parameters

Dibujado en pizarrón.

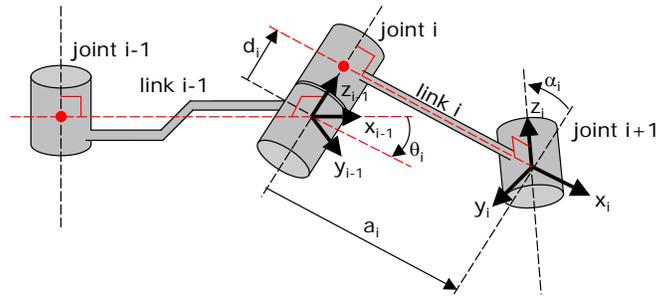


Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	$d_1=0$	a_1	0
2	q_2	$d_2=0$	a_2	0

Tabla de Parámetros D-H del Robot 2-DOF RR-Planar

Parámetros de Denavit-Hartenberg

Dibujado en pizarrón.



Parámetros de Denavit-Hartenberg

Dibujado en pizarrón.

x_i

x_i

z_{i-1}

z_{i-1}

α

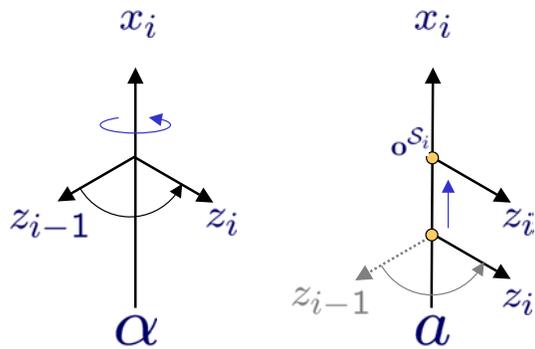
a

d

θ

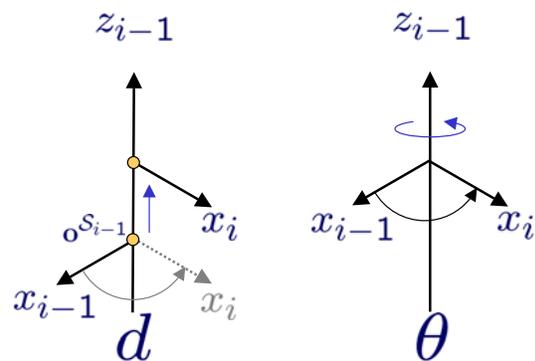
Parámetros de Denavit-Hartenberg

Dibujado en pizarrón.



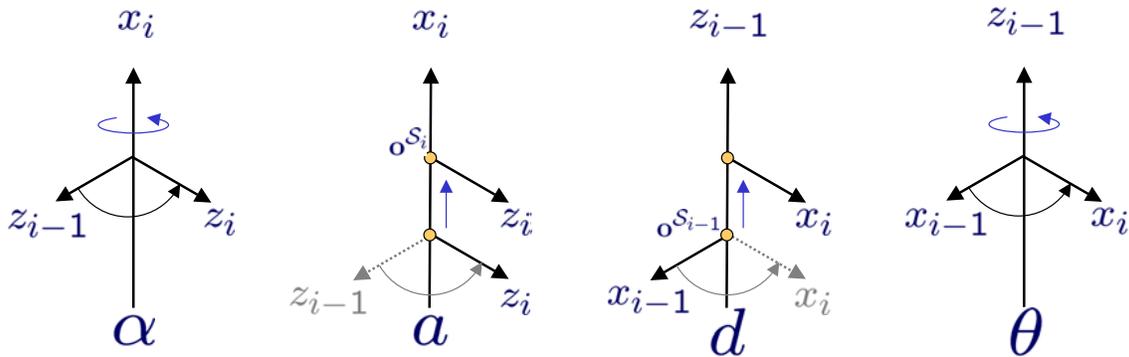
Parámetros de Denavit-Hartenberg

Dibujado en pizarrón.



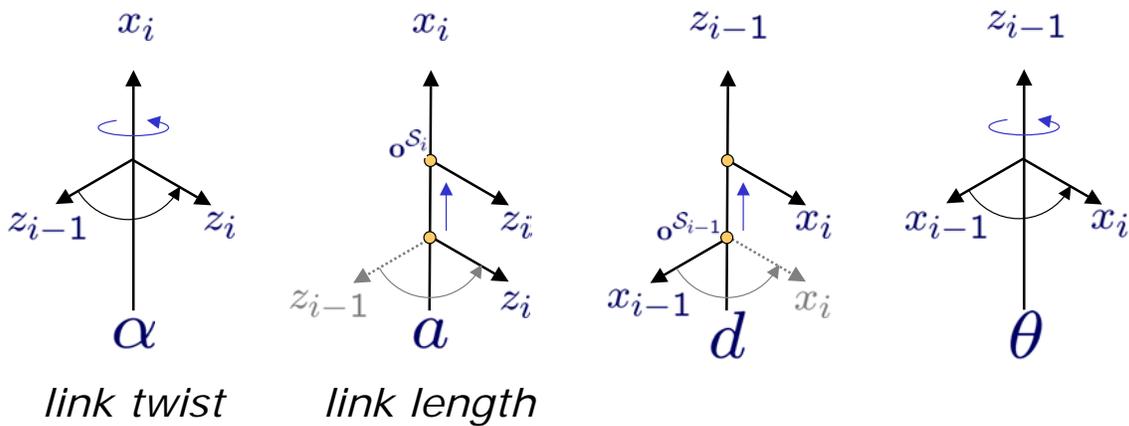
Parámetros de Denavit-Hartenberg

Dibujado en pizarrón.



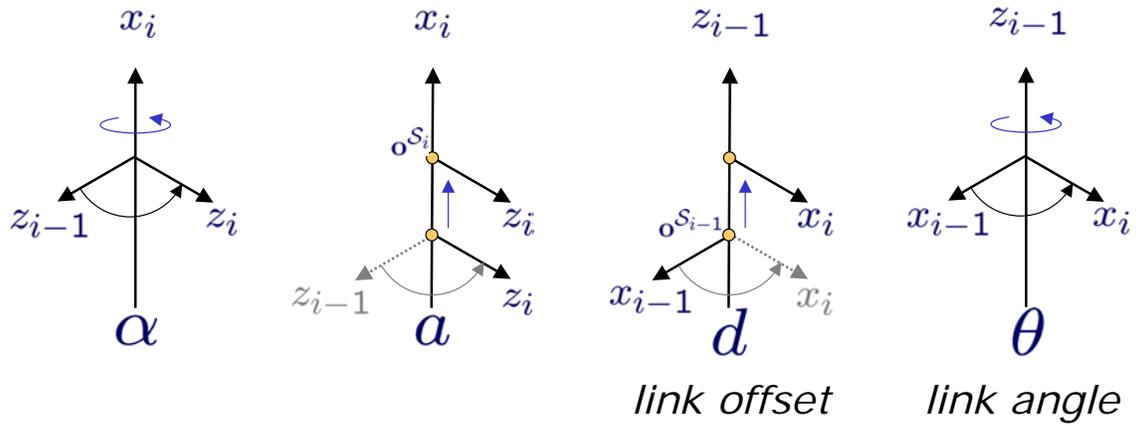
Parámetros de Denavit-Hartenberg

Dibujado en pizarrón.



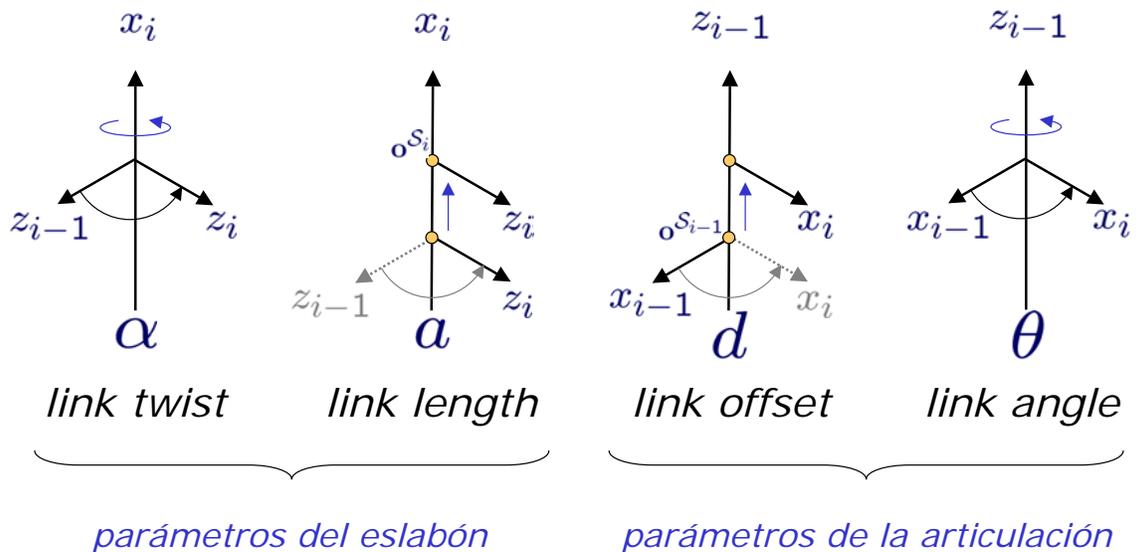
Parámetros de Denavit-Hartenberg

Dibujado en pizarrón.



Parámetros de Denavit-Hartenberg

Dibujado en pizarrón.



Procedimiento de Denavit-Hartenberg (1/9)

- Permite referir las coordenadas del efector final (herramienta o mano) del robot con respecto a un sistema de coordenadas inercial fijo en la base del robot.
- Reglas para la definición de los sistemas de coordenadas en base a los cuales se construirán las matrices de transformación homogéneas (rotación y traslación de coordenadas homogéneas):
 - La numeración es tal que cuando se actúa la articulación i , ($i=1,2,\dots,n$), se mueve el eslabón i .
 - El sistema de coordenadas $\{S_i\}$, ($i=1,2,\dots,n$), es solidario con el eslabón i (el sistema de coordenadas de la base $\{S_0\}$ está fijo).
 - El eje z_{i-1} yace a lo largo de la articulación i .
 - El eje x_i es normal a z_{i-1} , intersecta a z_{i-1} , y apunta hacia afuera de z_{i-1} .
 - El eje y_i se define tal que $\{S_i\}$ sea un sistema *dextrosum*, i.e.

$$y_i = \frac{z_i \times x_i}{\|z_i \times x_i\|}$$

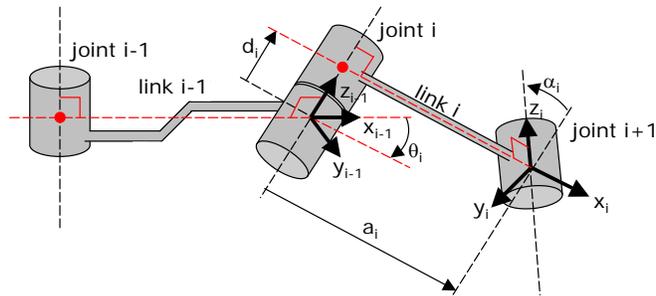
Procedimiento de Denavit-Hartenberg (2/9)

- La representación de D-H emplea cuatro parámetros que describen completamente la geometría de cada eslabón. Estos parámetros son:
 - θ_i : ángulo en torno a z_{i-1} de x_{i-1} a x_i usando la regla de la mano derecha (ángulo de la articulación – *link angle*).
 - d_i : distancia a lo largo de z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas $\{S_{i-1}\}$ hasta la intersección de z_{i-1} con x_i (offset del eslabón – *link offset*).
 - a_i : distancia a lo largo de x_i desde la intersección de z_{i-1} con x_i hasta el origen del sistema $\{S_i\}$, – o la distancia más corta entre z_{i-1} y z_i (largo del eslabón – *link length*).
 - α_i : ángulo entorno a x_i de z_{i-1} a z_i usando la regla de la mano derecha (ángulo de torsión del eslabón – *link twist*).
- Nota: a_i y α_i definen parámetros del eslabón, mientras que θ_i y d_i definen parámetros de la articulación. Para cada articulación $i=1, 2, \dots, n$, la coordenada generalizada se define como:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{para una articulación de revolución} \\ d_i & \text{para una articulación prismática} \end{cases}$$

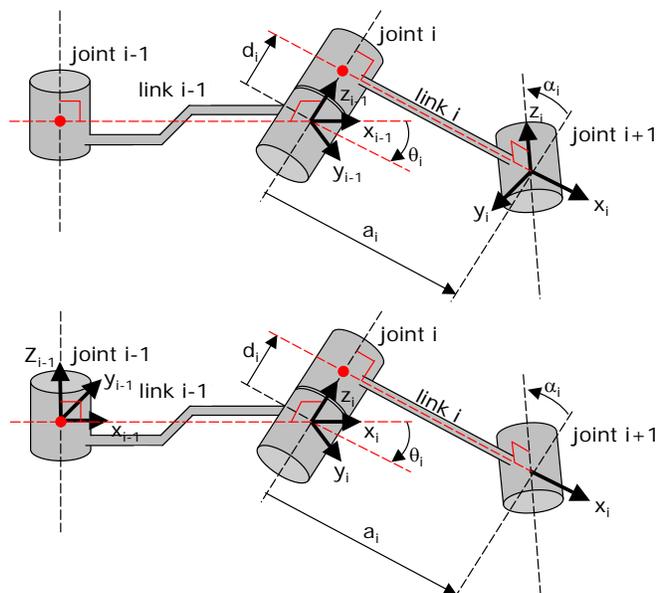
Procedimiento de Denavit-Hartenberg (3/9)

- Sistemas de Coordenadas según la convención D-H estándar:



Procedimiento de Denavit-Hartenberg (4/9)

- Sistemas de Coordenadas según la convención D-H modificada (Craig's modified D-H):



D-H Estándar:

En esta convención se fija el origen S_{i-1} en la articulación i , y a_i representa la distancia del link i (entre S_{i-1} y S_i).

D-H Modificado (Craig):

En esta convención se fija el origen S_{i-1} en la articulación $i-1$, y a_i representa la distancia del link i (entre S_i y S_{i+1}).

Procedimiento de Denavit-Hartenberg (5/9)

- DH1. Numerar los eslabones $i=0,1,\dots,n$. (0 para la base fija, 1 para el primer eslabón móvil, etc.)
- DH2. Numerar las articulaciones $i=1,2,\dots,n$. (1 para el primer grado de libertad, n para el último).
- DH3. Para $i=0,1,\dots,n-1$ fijar el eje z_i sobre la articulación $i+1$.
- DH4. Sistema de Coordenadas de la Base $\{S_0\}$: Situar el origen de $\{S_0\}$ cualquier punto del eje z_0 de modo que x_0 y y_0 formen un sistema *dextrorsum* con z_0 .
- DH5. Para $i=1,2,\dots,n-1$ fijar el origen del Sistema de Coordenadas del eslabón i , $\{S_i\}$, en la intersección del eje z_i con la línea perpendicular común a z_{i-1} y z_i . Si ambos ejes se cortan, fijar el origen en el punto de intersección. Si ambos ejes son paralelos, fijar el origen en la articulación $i+1$.

Procedimiento de Denavit-Hartenberg (6/9)

- DH6. Fijar x_i en la línea perpendicular común a z_{i-1} y z_i .
- DH7. Fijar y_i de modo que forme un sistema *dextrorsum* con x_i y z_i .
- DH8. Fijar el Sistema de Coordenadas del Extremo Efecto $\{S_n\}$ de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea perpendicular a z_{n-1} y z_n . Establecer $\{S_n\}$ preferentemente en el centro de la pinza (gripper) o en la punta de la herramienta que tenga el robot.
- DH9. Definir θ_i como el ángulo que habría que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.
- DH10. Definir d_i como la distancia medida a lo largo de z_{i-1} que habría desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_{i-1} y x_i queden alineados.
- DH11. Definir a_i como la distancia medida a lo largo de x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría desplazar el nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese totalmente con el de $\{S_i\}$.
- DH12. Definir α_i como el ángulo que habría que girar entorno a x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincidiese totalmente con $\{S_i\}$.

Procedimiento de Denavit-Hartenberg (7/9)

DH13. Construir las matrices de transformación:

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}A_i &= R(z_{i-1}, \theta_i) D(z_{i-1}, d_i) D(x_i, a_i) R(x_i, \alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde θ_i , a_i , d_i , α_i son los parámetros D-H del eslabón i .

Procedimiento de Denavit-Hartenberg (8/9)

DH14. Calcular la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base $\{S_0\}$ con el del extremo del robot $\{S_n\}$ como:

$$T = {}^0A_1 {}^1A_2 \cdots {}^{n-1}A_n$$

La matrix T define la posición y orientación del extremo referido a la base en función de las n coordenadas de las articulaciones.

- **Nota 1:**
 - Es posible demostrar que las reglas anteriores (específicamente aquellas en la transparencia 1/7) garantizan la existencia de una matriz de transformación de coordenadas, T , única. Sin embargo, el Procedimiento D-H permite que las definiciones de los marcos de coordenadas no sean únicas. Por esta razón, las matrices intermedias de transformación pueden ser diversas, pero la matriz T resultante será siempre igual para una geometría dada del robot.
- **Nota 2:**
 - Es común emplear la notación n , s , a , para referirse a los vectores unitarios x_n , y_n , z_n , respectivamente, del sistema de coordenadas de la herramienta o extremo efector. Esta notación proviene del hecho que normalmente a (approach) es la dirección en que el gripper aproxima el objeto, s (sliding) es la dirección en que el gripper abre/cierra el gripper, y n (normal) es la dirección perpendicular a s y a .

Procedimiento de Denavit-Hartenberg (9/9)

- **Nota 3:**

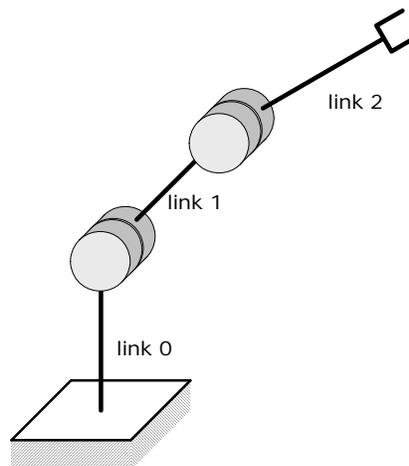
- En la construcción del Procedimiento D-H se consideran tres situaciones posibles:
 - a) z_{i-1} y z_i no son coplanares: En este caso la dirección de x_i está dada por:

$$x_i = \pm \frac{z_{i-1} \times z_i}{\|z_{i-1} \times z_i\|}$$

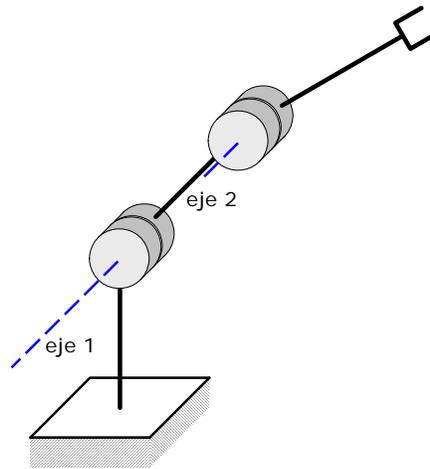
Notar que esta dirección corresponde a la del segmento más corto entre z_{i-1} y z_i (el cual corresponde a la normal común de z_{i-1} y z_i).

- b) z_{i-1} y z_i se intersectan: En este caso la dirección de x_i se define como en el caso a). Pero además se tiene que $a_i=0$. En este caso resulta natural colocar el origen de $\{S_i\}$ en la intersección de z_{i-1} y z_i .
 - c) z_{i-1} y z_i son paralelos: En este caso existen un número infinito de rectas perpendiculares a ambos ejes y se tiene que $a_i=0$, puesto que son paralelos. Además resulta conveniente colocar x_i de modo que intersecte el origen de $\{S_{i-1}\}$, así el offset entre eslabones d_i será cero ($d_i=0$).
- Notar además que los tres casos se expresan en los pasos DH5-DH6.

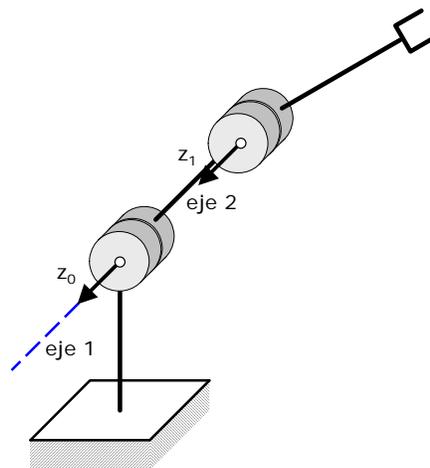
Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - (DH1)



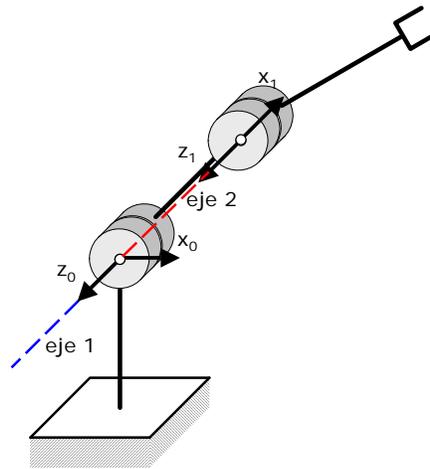
Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - ($DH2$)



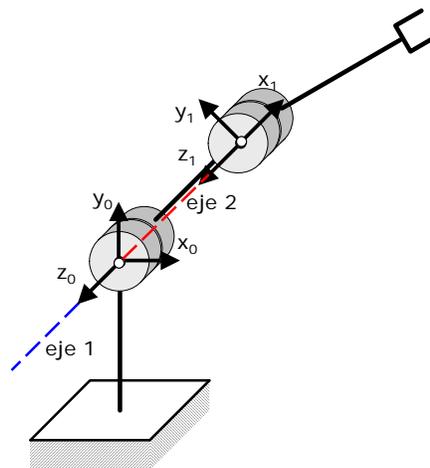
Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - ($DH3$)



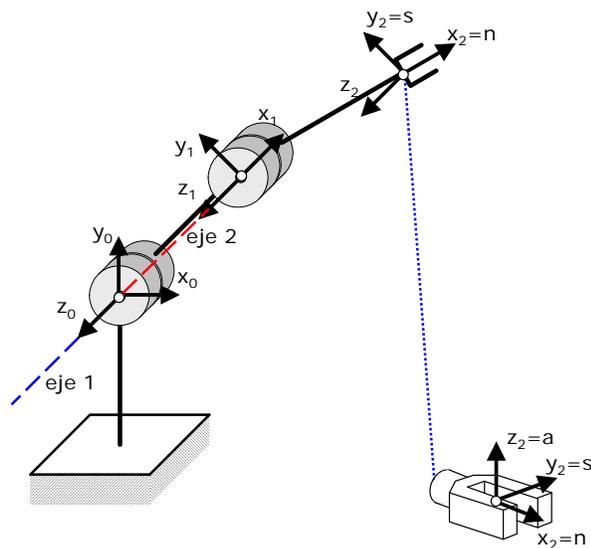
Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - (DH4-DH6)



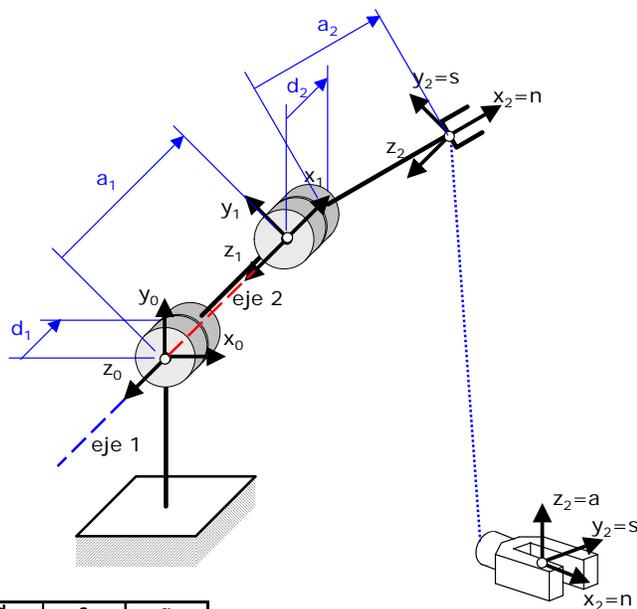
Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - (DH7)



Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - (DH8)



Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - (DH9-DH12)



Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	$d_1=0$	a_1	0
2	q_2	$d_2=0$	a_2	0

Tabla de Parámetros D-H del Robot 2-DOF RR-Planar

Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - (DH13)

$${}^{i-1}A_i = R(z_{i-1}, \theta_i)D(z_{i-1}, d_i)D(x_i, a_i)R(x_i, \alpha_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_1 = R(z_0, \theta_1)D(z_0, d_1)D(x_1, a_1)R(x_1, \alpha_1) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = R(z_1, \theta_2)D(z_1, d_2)D(x_2, a_2)R(x_2, \alpha_2) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	$d_1=0$	a_1	0
2	q_2	$d_2=0$	a_2	0

Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - (DH13b)

$${}^iA_{i-1} = R(x_i, -\alpha_i)D(x_i, -a_i)D(z_{i-1}, -d_i)R(z_{i-1}, -\theta_i)$$

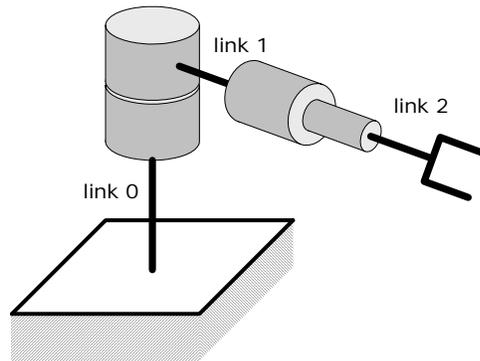
$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 & -a_i \\ -c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & s\alpha_i & -d_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & -d_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & -a_1 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

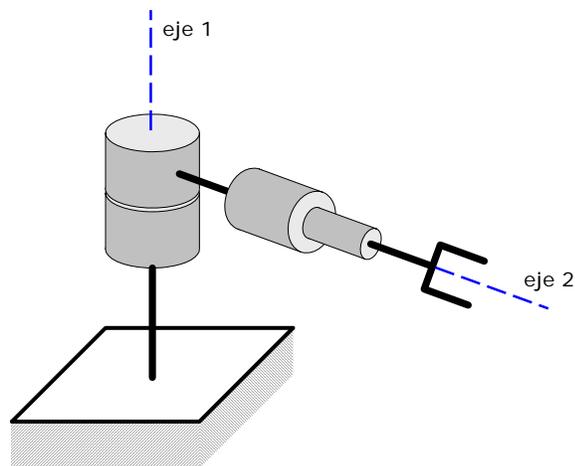
$${}^2A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 & -a_2 \\ -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	$d_1=0$	a_1	0
2	q_2	$d_2=0$	a_2	0

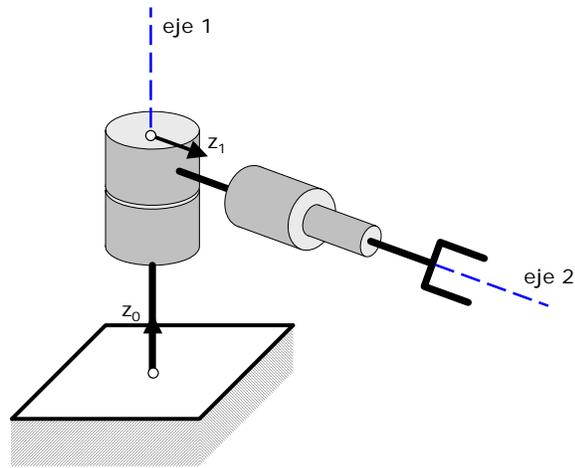
Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH1)



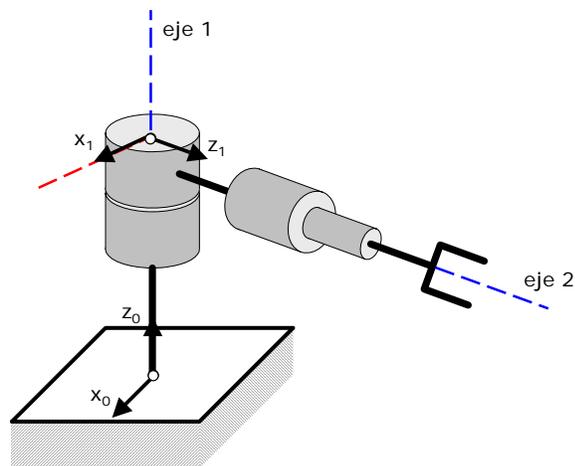
Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH2)



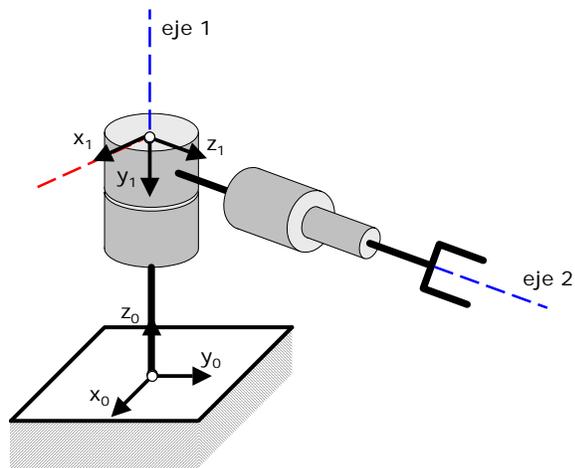
Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH3)



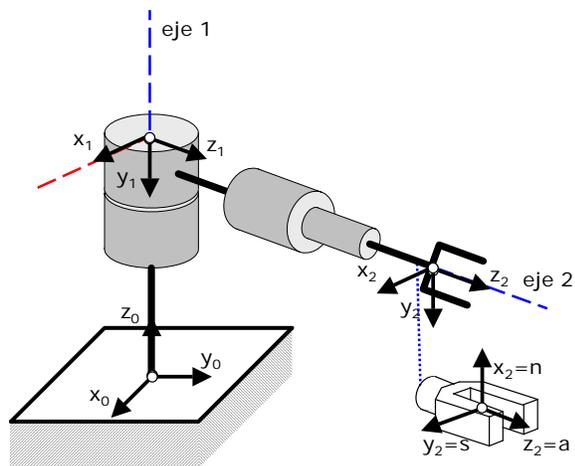
Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH4-DH6)



Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH7)



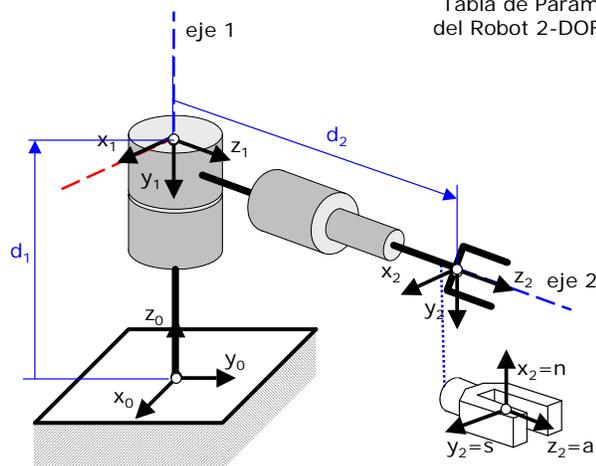
Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH8)



Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH9-DH12)

Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	0	$-\pi/2$
2	0	q_2	0	0

Tabla de Parámetros D-H del Robot 2-DOF RP-Planar



Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH13)

$${}^{i-1}A_i = R(z_{i-1}, \theta_i) D(z_{i-1}, d_i) D(x_i, a_i) R(x_i, \alpha_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_1 = R(z_0, \theta_1) D(z_0, d_1) D(x_1, a_1) R(x_1, \alpha_1) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = R(z_1, \theta_2) D(z_1, d_2) D(x_2, a_2) R(x_2, \alpha_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	0	$-\pi/2$
2	0	q_2	0	0

Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH13b)

$${}^i A_{i-1} = R(x_i, -\alpha_i) D(x_i, -a_i) D(z_{i-1}, -d_i) R(z_{i-1}, -\theta_i)$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 & -a_i \\ -c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & s\alpha_i & -d_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & -d_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 A_0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

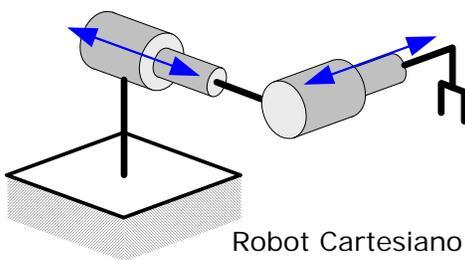
$${}^2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	0	$-\pi/2$
2	0	q_2	0	0

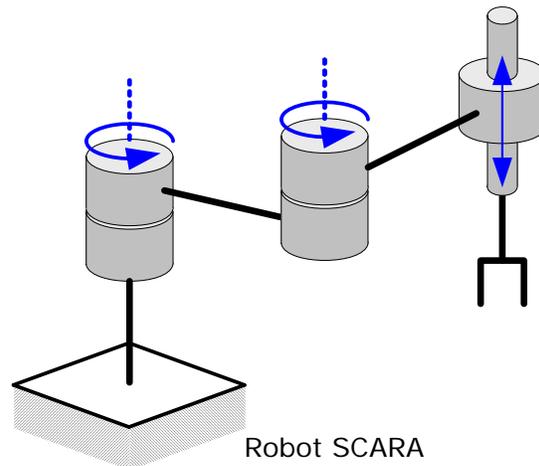
Ejercicios

Obtenga los parámetros DH para un robot:

1. Cartesiano XY.
2. SCARA (articulaciones RRP)
3. Articulado con 6DOF R, como el Kuka KR16.

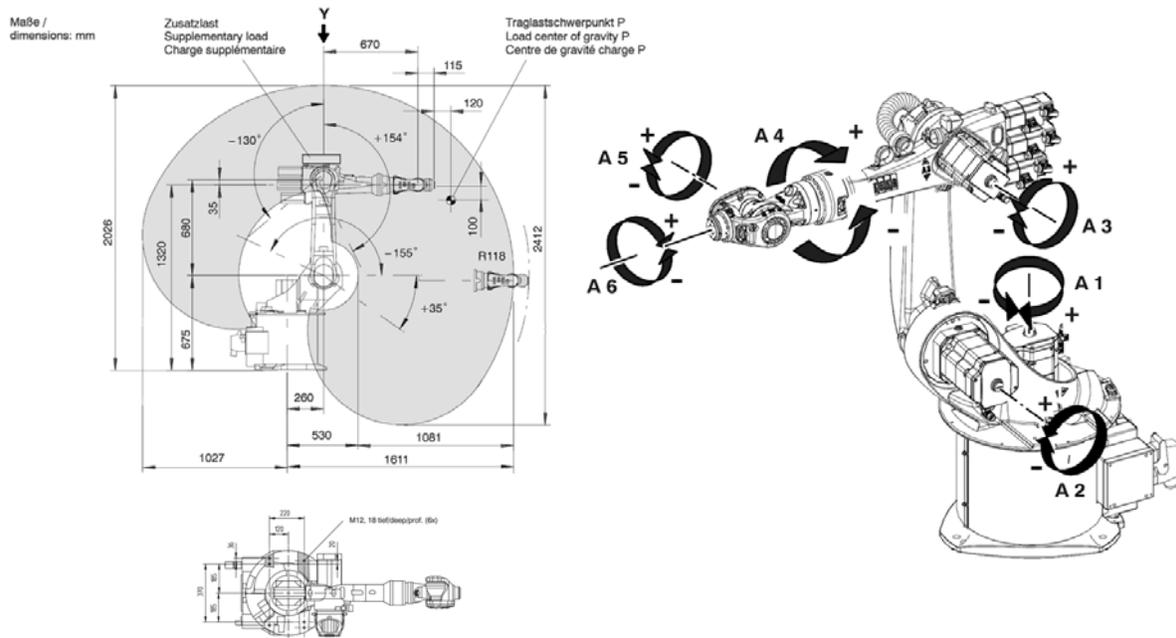


Robot Cartesiano
2-DOF PP-Planar

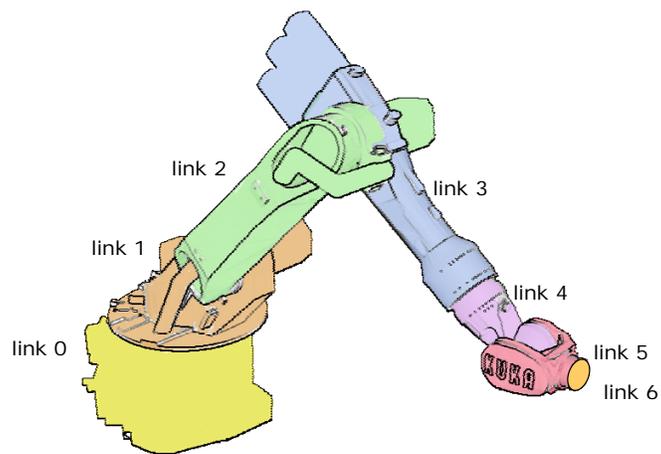


Robot SCARA
3-DOF RRP

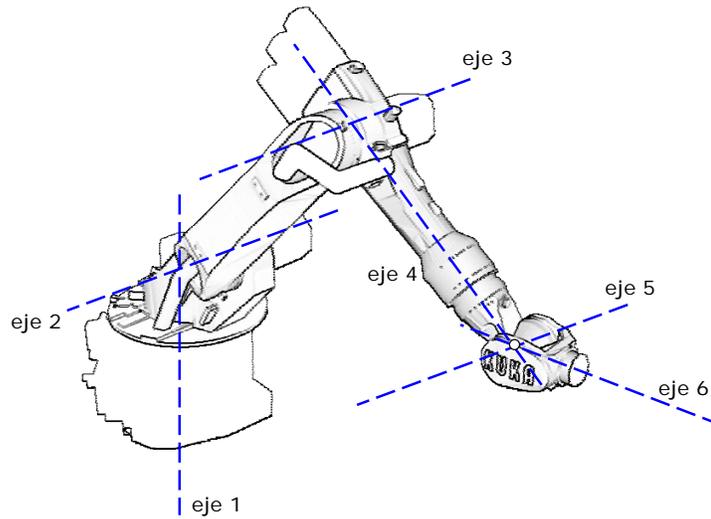
Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16



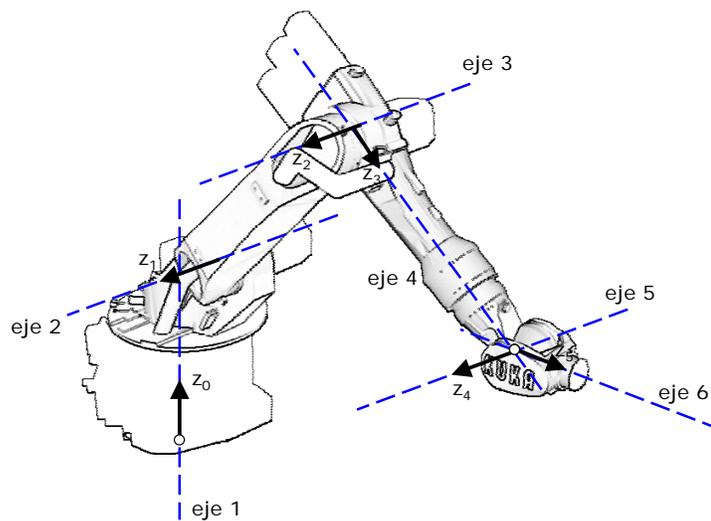
Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (DH1)



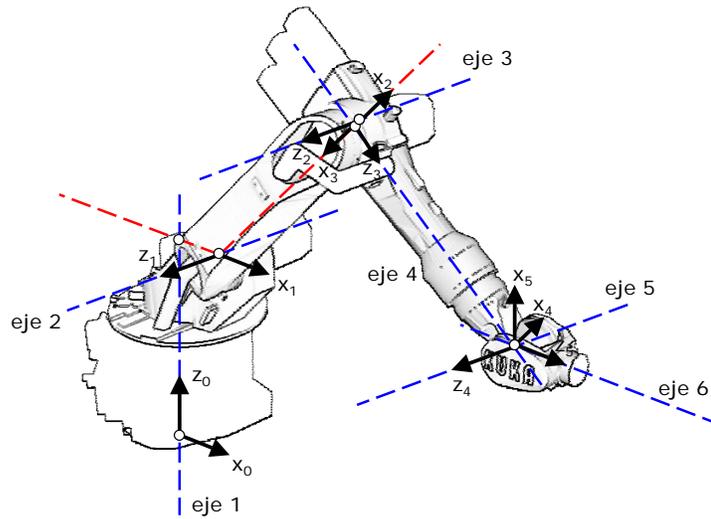
Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (DH2)



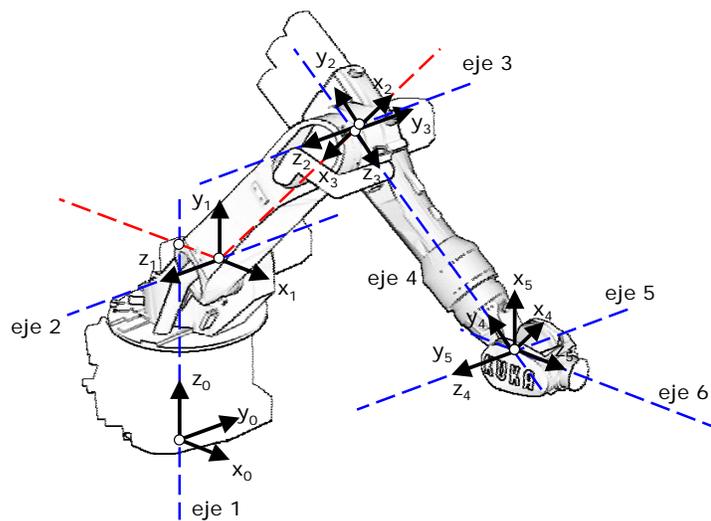
Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (DH3)



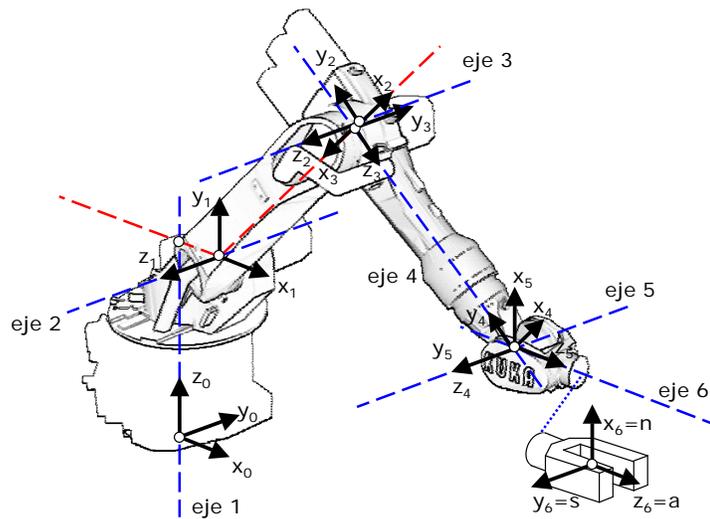
Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (DH4-DH6)



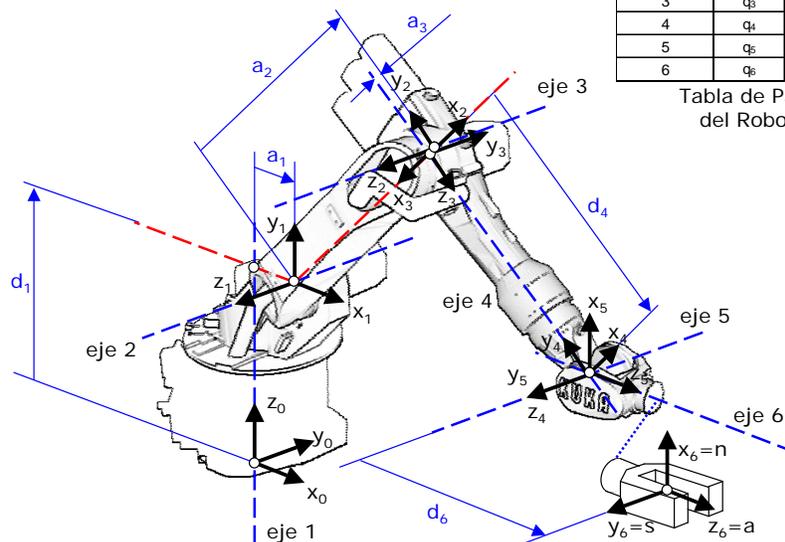
Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (DH7)



Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (DH8)



Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (DH9-DH12)



Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	a_1	$+\pi/2$
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	a_3	$-\pi/2$
4	q_4	d_4	0	$-\pi/2$
5	q_5	0	0	$+\pi/2$
6	q_6	d_6	0	0

Tabla de Parámetros D-H del Robot Kuka KR16

Como sería la tabla de parámetros D-H si articulación 4 fuese prismática en vez de rotatoria?

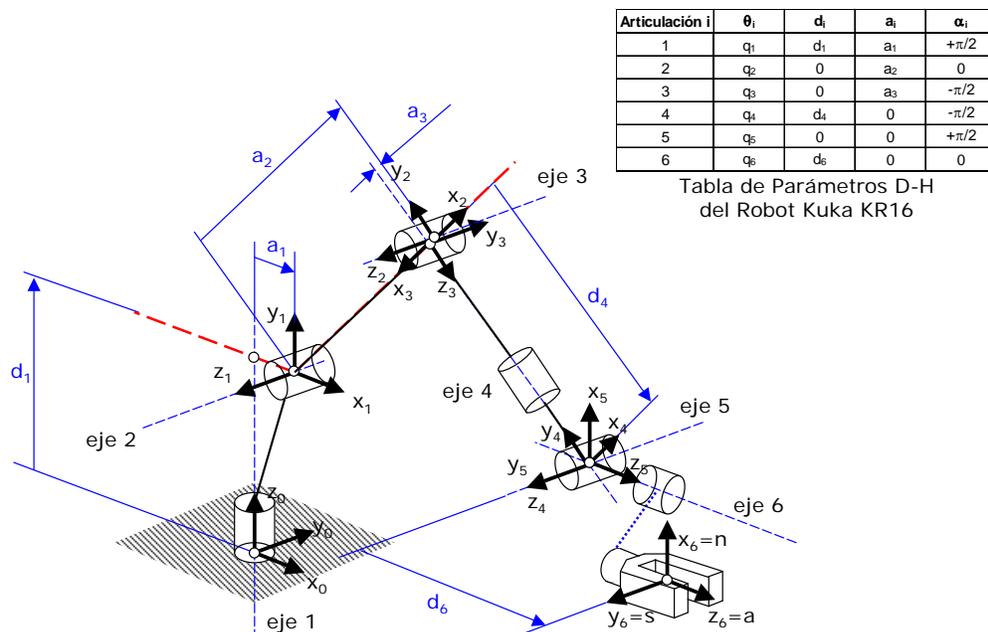
Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (DH13-DH14)

$${}^0A_3 = \begin{bmatrix} c1 c2 c3 - c1 s2 s3 & -s1 & -c1 c2 s3 - c1 s2 c3 & c1 c2 c3 a3 - c1 s2 s3 a3 + c1 c2 a2 + c1 a1 \\ s1 c2 c3 - s1 s2 s3 & c1 & -s1 c2 s3 - s1 s2 c3 & s1 c2 c3 a3 - s1 s2 s3 a3 + s1 c2 a2 + s1 a1 \\ s2 c3 + c2 s3 & 0 & -s2 s3 + c2 c3 & s2 c3 a3 + c2 s3 a3 + s2 a2 + d1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_6 = \begin{bmatrix} c4 c5 c6 - s4 s6 & -c4 c5 s6 - s4 c6 & c4 s5 & c4 s5 d6 \\ s4 c5 c6 + c4 s6 & -s4 c5 s6 + c4 c6 & s4 s5 & s4 s5 d6 \\ -s5 c6 & s5 s6 & c5 & c5 d6 + d4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = {}^0A_3 {}^3A_6$$

Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (Simplificado)

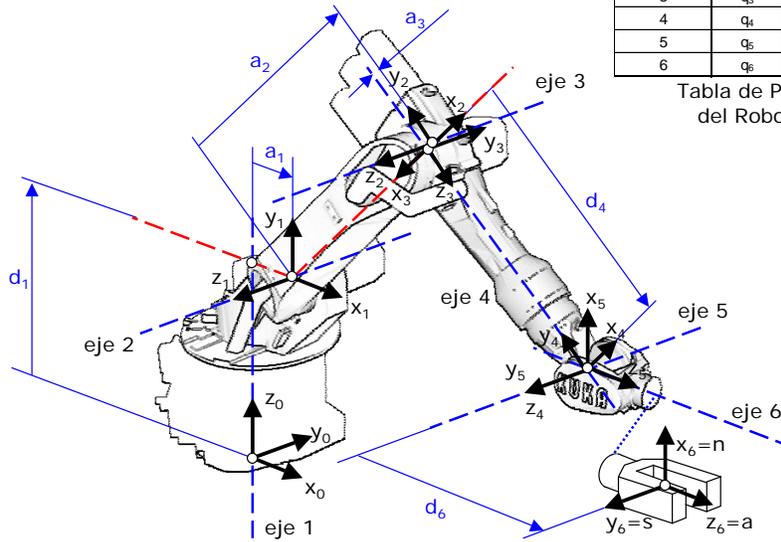


Como sería la tabla de parámetros D-H si articulación 4 fuese prismática en vez de rotatoria?

Ejemplo: Robot Industrial Kuka KR16 - (Repaso)

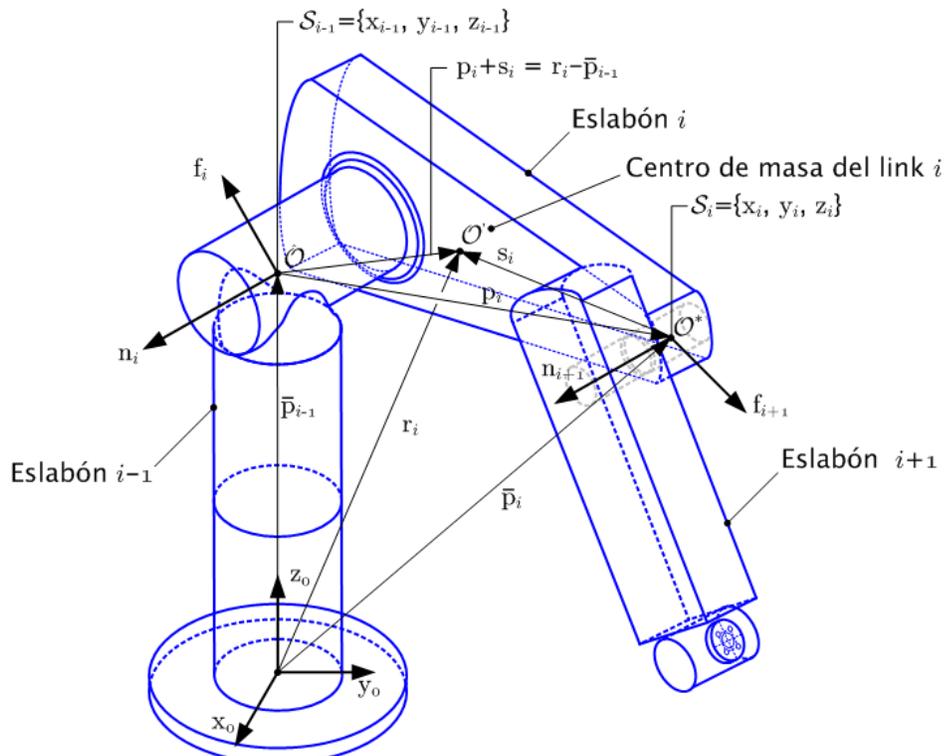
Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	a_1	$+\pi/2$
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	a_3	$-\pi/2$
4	q_4	d_4	0	$-\pi/2$
5	q_5	0	0	$+\pi/2$
6	q_6	d_6	0	0

Tabla de Parámetros D-H del Robot Kuka KR16



Como sería la tabla de parámetros D-H si articulación 4 fuese prismática en vez de rotatoria?

RNE



RNE – Supuestos para cada eslabón i

1. La geometría del robot está definida empleando los parámetros de Denavit-Hartenberg.
2. El origen \mathcal{O}' se situa sobre su centro de masa.

RNE – Supuestos para cada eslabón i

3. Las siguientes variables expresadas con respecto al sistema de referencia de la base $\mathcal{S}_0 = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0\}$:

- m_i es la masa total del eslabón i ,
- \mathbf{r}_i es la posición del centro de masa del eslabón i desde el origen del sistema de referencia de la base,
- \mathbf{s}_i es la posición del centro de masa del eslabón i desde el origen del sistema \mathcal{S}_i ,

RNE – Supuestos para cada eslabón i

- \mathbf{p}_i es la posición del origen del sistema de coordenadas \mathcal{S}_i con respecto al sistema de coordenadas \mathcal{S}_{i-1} ,
- $\boldsymbol{\omega}_i$ es la velocidad angular del sistema \mathcal{S}_i ,
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ es la aceleración angular del sistema \mathcal{S}_i ,
- $\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ es la velocidad lineal del centro de masa del eslabón i ,

RNE – Supuestos para cada eslabón i

- $\dot{\mathbf{v}}_i$ es la aceleración lineal del sistema \mathcal{S}_i ,
- $\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$ es la aceleración lineal del centro de masa del eslabón i ,
- \mathbf{F}_i es la fuerza externa total ejercida sobre el eslabón i en su centro de masa,
- \mathbf{N}_i es el momento externo total ejercido sobre el eslabón i en su centro de masa,

RNE – Supuestos para cada eslabón i

- \mathbf{I}_i es la matriz de inercia del eslabón i entorno a su centro de masa referido al sistema \mathcal{S}_0 ,
- \mathbf{f}_i es la fuerza ejercida sobre el eslabón i por el eslabón $i - 1$ en el sistema \mathcal{S}_{i-1} para soportar el eslabón i y superiores,
- \mathbf{n}_i es el momento ejercido sobre el eslabón i por el eslabón $i - 1$ en el sistema \mathcal{S}_{i-1} .

RNE – Alg. 1

Algorithm 1: Algoritmo Recursivo de Newton-Euler (coordenadas de la base \mathcal{S}_0)

Data: Los parámetros geométricos de Denavit-Hartenberg $\alpha_i, a_i, \theta_i, d_i$, las masas m_i y momentos de inercia de los eslabones $J_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Input: Las posiciones q_i , velocidades \dot{q}_i y aceleraciones \ddot{q}_i de las coordenadas generalizadas de las articulaciones $i = 1, 2, \dots, n$.

Output: Las fuerzas/torques τ_i de la articulaciones $i = 1, 2, \dots, n$.

Forward Equations: For $i = 1$ to n

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + \dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} & c_i = R \\ \omega_{i-1} & c_i = P \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + \ddot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} + \omega_{i-1} \times (\dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1}) & c_i = R \\ \dot{\omega}_{i-1} & c_i = P \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_i \times \mathbf{p}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{p}_i) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} & c_i = R \\ \ddot{q}_i \mathbf{z}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times \mathbf{p}_i + 2\omega_i \times (\dot{q}_i \mathbf{z}_{i-1}) \\ + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{p}_i) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1} & c_i = P \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_i = \dot{\omega}_i \times \mathbf{s}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{s}_i) + \dot{\mathbf{v}}_i$$

Backward Equations: For $i = n$ to 1

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\mathbf{I}_i \omega_i)$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1}$$

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{p}_i \times \mathbf{f}_{i+1} + (\mathbf{p}_i + \mathbf{s}_i) \times \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i$$

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{n}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + b_i \dot{q}_i & c_i = R \\ \mathbf{f}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + b_i \dot{q}_i & c_i = P \end{cases}$$

donde b_i es el coeficiente de roce viscoso de la articulación i .

Las condiciones iniciales típicas son $\omega_0 = \dot{\omega}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{v}} = (g_x, g_y, g_z)^T$ (para incluir la gravedad), donde $|\mathbf{g}| = 9.8062 \text{ m/s}^2$.

RNE – Alg. 1

En el algoritmo anterior, las matrices de inercia \mathbf{I}_i dependen de la configuración del robot en cada instante, es decir de las variables de las articulaciones q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dado que $\mathbf{I}_i = {}^0\mathbf{R}_i \mathbf{I}^{\mathcal{S}_i} \mathbf{R}_0$, donde $\mathbf{I}^{\mathcal{S}_i}$ es el momento de inercia del eslabón i referido al sistema de coordenadas \mathcal{S}_i propio del eslabón y

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

RNE – Alg. 1

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

es la matriz de rotación que transforma un vector referido al sistema \mathcal{S}_i a un vector referido al sistema \mathcal{S}_{i-1} , y satisface:

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i^{-1} = {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T = {}^i\mathbf{R}_{i-1}.$$

RNE – Alg. 1

En vez de calcular $\omega_i, \dot{\omega}_i, \dot{v}_i, \mathbf{a}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{N}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i$ y τ_i referidos al sistema de coordenadas de la base, se calcula ${}^i\mathbf{R}_0\omega_i, {}^i\mathbf{R}_0\dot{\omega}_i, {}^i\mathbf{R}_0\dot{v}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{a}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{F}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{N}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{f}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{n}_i, {}^i\mathbf{R}_0\tau_i$, la cuales están referidas a su propio eslabón i . Además los momentos de inercia \mathbf{I}_i de cada eslabón i referidos al sistema de la base \mathcal{S}_0 se expresan términos de los momentos de cada eslabón referidos a su propio sistema de coordenadas \mathcal{S}_i empleando la relación $\mathbf{I}^{\mathcal{S}_i} = {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{I}_i{}^0\mathbf{R}_i$.

RNE – Alg. 2

Algorithm 2: Algoritmo Recursivo de Newton-Euler Eficiente (coordenadas del eslabón \mathcal{S}_i)

Data: Los parámetros geométricos de Denavit-Hartenberg $\alpha_i, a_i, \theta_i, d_i$, las masas m_i y momentos de inercia de los eslabones $\mathbf{I}_i^{\mathcal{S}_i}, i = 1, 2, \dots, n$.

Input: Las posiciones q_i , velocidades \dot{q}_i y aceleraciones \ddot{q}_i de las coordenadas generalizadas de las articulaciones $i = 1, 2, \dots, n$.

Output: Las fuerzas/torques τ_i de la articulaciones $i = 1, 2, \dots, n$.

Forward Equations: For $i = 1$ to n

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i &= \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{q}_i\mathbf{z}_0) & c_i = R \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_{i-1}) & c_i = P \end{cases} \\
 {}^i\mathbf{R}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_i &= \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} [{}^{i-1}\mathbf{R}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \ddot{q}_i\mathbf{z}_0 + ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times (\dot{q}_i\mathbf{z}_0)] & c_i = R \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}) & c_i = P \end{cases} \\
 {}^i\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_i &= \begin{cases} ({}^i\mathbf{R}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i) + ({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i) \times [({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i)] + {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_{i-1}) & c_i = R \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} (\dot{q}_i\mathbf{z}_0 + {}^{i-1}\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_{i-1}) + ({}^i\mathbf{R}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i) \\ + 2 ({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i) \times (\dot{q}_i {}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0) + ({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i) \times [({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i)] & c_i = P \end{cases} \\
 {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{a}_i &= ({}^i\mathbf{R}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{s}_i) + ({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i) \times [({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{s}_i)] + {}^i\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_i
 \end{aligned}$$

Backward Equations: For $i = n$ to 1

$$\begin{aligned}
 {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{f}_i &= m_i {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{a}_i + {}^i\mathbf{R}_{i+1} ({}^{i+1}\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{i+1}) \\
 {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{n}_i &= {}^i\mathbf{R}_{i+1} [{}^{i+1}\mathbf{R}_0\mathbf{n}_{i+1} + ({}^{i+1}\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i) \times ({}^{i+1}\mathbf{R}_0\mathbf{f}_{i+1})] \\
 &\quad + ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i + {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{s}_i) \times (m_i {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{a}_i) \\
 &\quad + \mathbf{I}_i^{\mathcal{S}_i} ({}^i\mathbf{R}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_i) + ({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i) \times [\mathbf{I}_i^{\mathcal{S}_i} ({}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\omega}_i)] \\
 {}^i\mathbf{R}_0\boldsymbol{\tau}_i &= \begin{cases} ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{n}_i)^T ({}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0) + b_i\dot{q}_i & c_i = R \\ ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{f}_i)^T ({}^i\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{z}_0) + b_i\dot{q}_i & c_i = P \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{I}^{\mathcal{S}_i} = {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{I}_i^0\mathbf{R}_i$ es el momento de inercia del eslabón i en coordenadas del eslabón, y b_i es el coeficiente de roce viscoso de la articulación i .

Las condiciones iniciales típicas son $\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{v}} = (g_x, g_y, g_z)^T$ (para incluir la gravedad), donde $|\mathbf{g}| = 9.8062 \text{ m/s}^2$.

RNE – Alg. 3 (= Alg. 2 notación compacta)

$$\omega_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\omega_i$$

$$\dot{\omega}_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\dot{\omega}_i$$

$$\dot{v}_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\dot{v}_i$$

$$\mathbf{a}_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{p}_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i = [a_i, d_i \sin(\alpha_i), d_i \cos(\alpha_i)]^T$$

$$\mathbf{s}_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{s}_i$$

$$\mathbf{f}_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{n}_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{n}_i$$

$$\tau_i^b \stackrel{def}{=} {}^i\mathbf{R}_0\tau_i$$

$$\mathbf{I}_i^b \stackrel{def}{=} \mathbf{I}S_i = {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{I}_i^0\mathbf{R}_i$$

RNE – Alg. 3

Algorithm 3: Algoritmo Recursivo de Newton-Euler Eficiente (coordenadas del eslabón S_i) y Compacto

Data: Los parámetros geométricos de Denavit-Hartenberg $\alpha_i, a_i, \theta_i, d_i$, las masas m_i y momentos de inercia de los eslabones $I_i^b, i = 1, 2, \dots, n$.

Input: Las posiciones q_i , velocidades \dot{q}_i y aceleraciones \ddot{q}_i de las coordenadas generalizadas de las articulaciones $i = 1, 2, \dots, n$, y las fuerzas y momentos externos $\mathbf{f}_{i+1}^b, \mathbf{n}_{i+1}^b$ sobre el extremo efector.

Output: Las fuerzas/torques τ_i de las articulaciones $i = 1, 2, \dots, n$.

Alg. 3

Inicialización

1. DH: Asignar a cada eslabón i un sistema de referencia \mathcal{S}_i de acuerdo a las reglas de D-H.
2. m_i, \mathbf{I}_i^b, b_i : Definir los parámetros de masa m_i y la matriz de inercia \mathbf{I}_i^b del eslabón i respecto de su centro de masa y expresada en el sistema \mathcal{S}_i , así como el roce viscoso b_i de la articulación i .

Alg. 3 – Inicialización

3. \mathbf{p}_i^b : Calcular las coordenadas del origen del sistema \mathcal{S}_i respecto a \mathcal{S}_{i-1} según $\mathbf{p}_i^b = [a_i, d_i \sin(\alpha_i), d_i \cos(\alpha_i)]^T$.
4. \mathbf{s}_i^b : Definir las coordenadas \mathbf{s}_i^b del centro de masa del eslabón i con respecto al sistema \mathcal{S}_i .
5. Definir $\mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$.

Alg. 3 – Inicialización

6. ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$: Obtener las matrices de rotación ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$ y sus inversas ${}^i\mathbf{R}_{i-1} = {}^{i-1}\mathbf{R}_i^T$.

7. *Condiciones iniciales*: Salvo que la base del robot esté en movimiento, las condiciones iniciales *típicas* para la base estacionaria son

Velocidad angular: $\omega_0 = [0, 0, 0]^T$

Aceleración angular: $\dot{\omega}_0 = [0, 0, 0]^T$

Velocidad lineal: $\mathbf{v}_0 = [0, 0, 0]^T$

Aceleración lineal: $\dot{\mathbf{v}} = [g_x, g_y, g_z]^T$ (para incluir la gravedad), donde $|\mathbf{g}| = 9.8062 \text{ m/s}^2$.

Forward Equations: For $i = 1$ to n

$$\omega_i^b = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} (\omega_{i-1}^b + \dot{q}_i \mathbf{z}_0) & c_i = R \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} (\omega_{i-1}^b) & c_i = P \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_i^b = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} [\dot{\omega}_{i-1}^b + \ddot{q}_i \mathbf{z}_0 + \omega_{i-1}^b \times (\dot{q}_i \mathbf{z}_0)] & c_i = R \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} (\dot{\omega}_{i-1}^b) & c_i = P \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i^b = \begin{cases} \dot{\omega}_i^b \times \mathbf{p}_i^b + \omega_i^b \times (\omega_i^b \times \mathbf{p}_i^b) + {}^i\mathbf{R}_{i-1} \dot{\mathbf{v}}_{i-1}^b & c_i = R \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} (\ddot{q}_i \mathbf{z}_0 + \dot{\mathbf{v}}_{i-1}^b) + \dot{\omega}_i^b \times \mathbf{p}_i^b \\ + 2\omega_i^b \times (\dot{q}_i {}^i\mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0) + \omega_i^b \times (\omega_i^b \times \mathbf{p}_i^b) & c_i = P \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_i^b = \dot{\omega}_i^b \times \mathbf{s}_i^b + \omega_i^b \times (\omega_i^b \times \mathbf{s}_i^b) + \dot{\mathbf{v}}_i^b$$

Backward Equations: For $i = n$ to 1

$$\mathbf{f}_i^b = m_i \mathbf{a}_i^b + {}^i \mathbf{R}_{i+1} \mathbf{f}_{i+1}^b$$

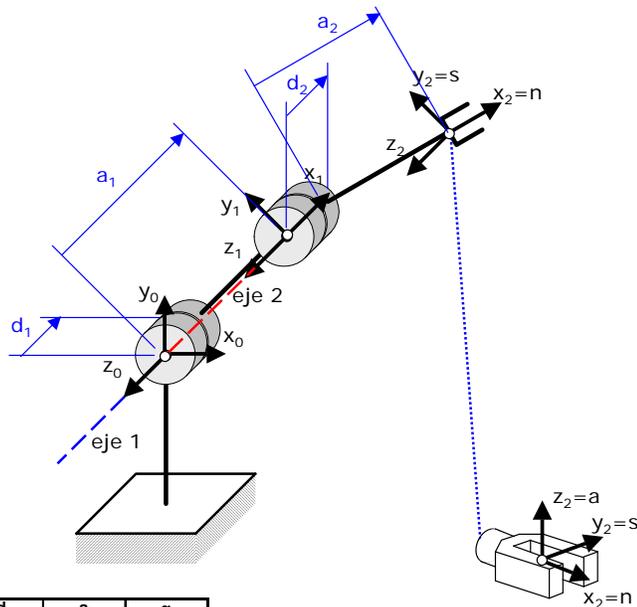
$$\mathbf{n}_i^b = {}^i \mathbf{R}_{i+1} \left[\mathbf{n}_{i+1}^b + ({}^{i+1} \mathbf{R}_i \mathbf{p}_i^b) \times \mathbf{f}_{i+1}^b \right] + (\mathbf{p}_i^b + \mathbf{s}_i^b) \times (m_i \mathbf{a}_i^b) \\ + \mathbf{I}_i^b \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^b + \boldsymbol{\omega}_i^b \times (\mathbf{I}_i^b \boldsymbol{\omega}_i^b)$$

$$\tau_i^b = \begin{cases} \mathbf{n}_i^{bT} ({}^i \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0) + b_i \dot{q}_i & c_i = R \\ \mathbf{f}_i^{bT} ({}^i \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{z}_0) + b_i \dot{q}_i & c_i = P \end{cases}$$

Ejemplos en Maple y en Matlab

- 2-DOF RR-Planar
- 2-DOF RP-Planar

Ejemplo 1: 2-DOF RR-Planar - (DH9-DH12)



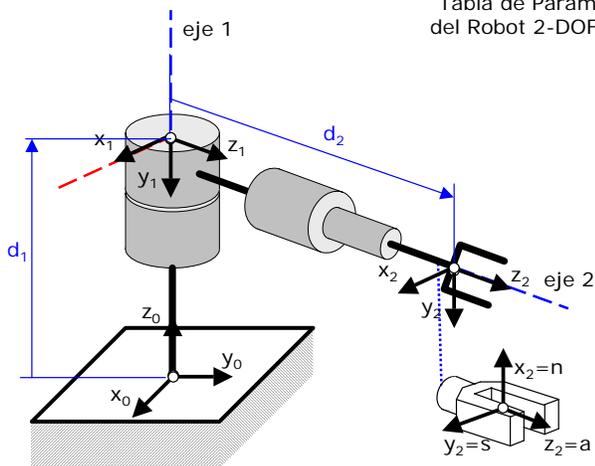
Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	$d_1=0$	a_1	0
2	q_2	$d_2=0$	a_2	0

Tabla de Parámetros D-H del Robot 2-DOF RR-Planar

Ejemplo 2: 2-DOF RP-Planar - (DH9-DH12)

Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	0	$-\pi/2$
2	0	d_2	0	0

Tabla de Parámetros D-H del Robot 2-DOF RP-Planar



Gracias!